# DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD
# DISTRIBUCIONES DISCRETAS

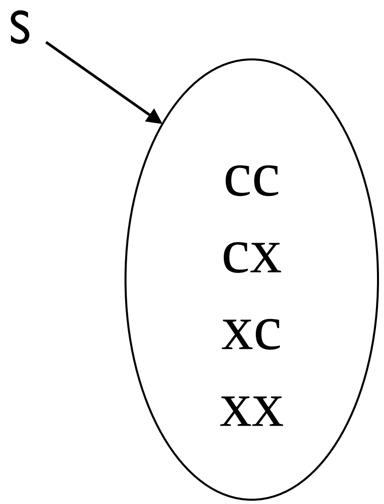
**DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD**

**Variable Aleatoria Discreta- función de masa (fdm) ó función de cuantía (fdc)**

**Variable aleatoria continua-función de densidad (fdd)**

Sea *E* el experimento que consiste en lanzar dos monedas y observar su cara superior, entonces el espacio muestral es el siguiente:

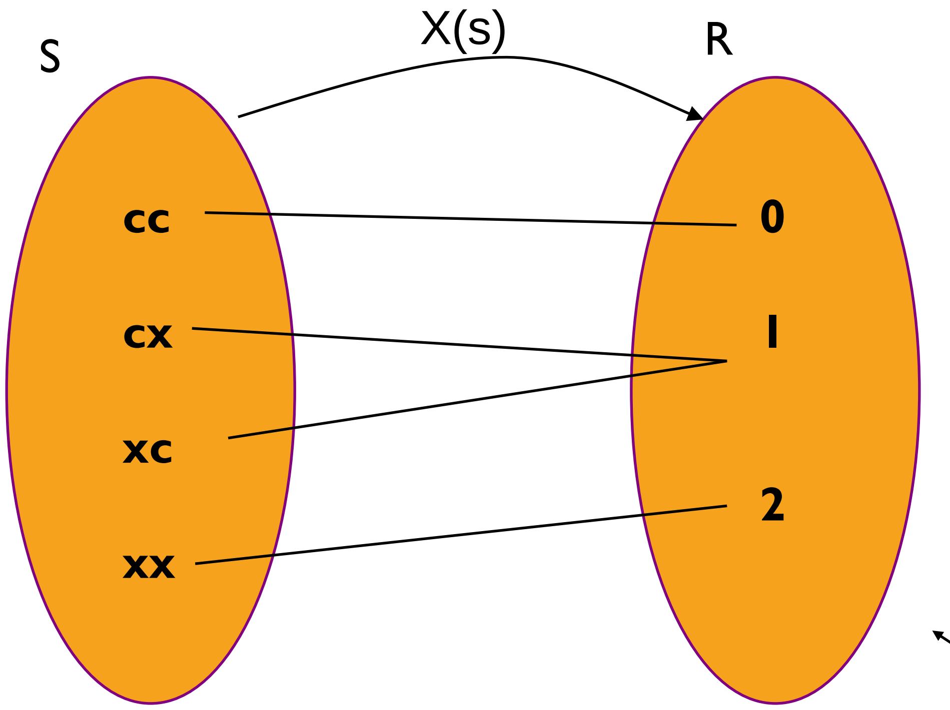
$$S = \{cc, cx, xc, xx\}$$




**Si definimos la variable aleatoria X que resulta de contar el número de cruces, entonces tendríamos los siguientes conjuntos:**

# Variables Aleatorias

Si definimos la variable aleatoria X que resulta de contar el número de cruces entonces podemos colocar en otro diagrama como se muestra a continuación:

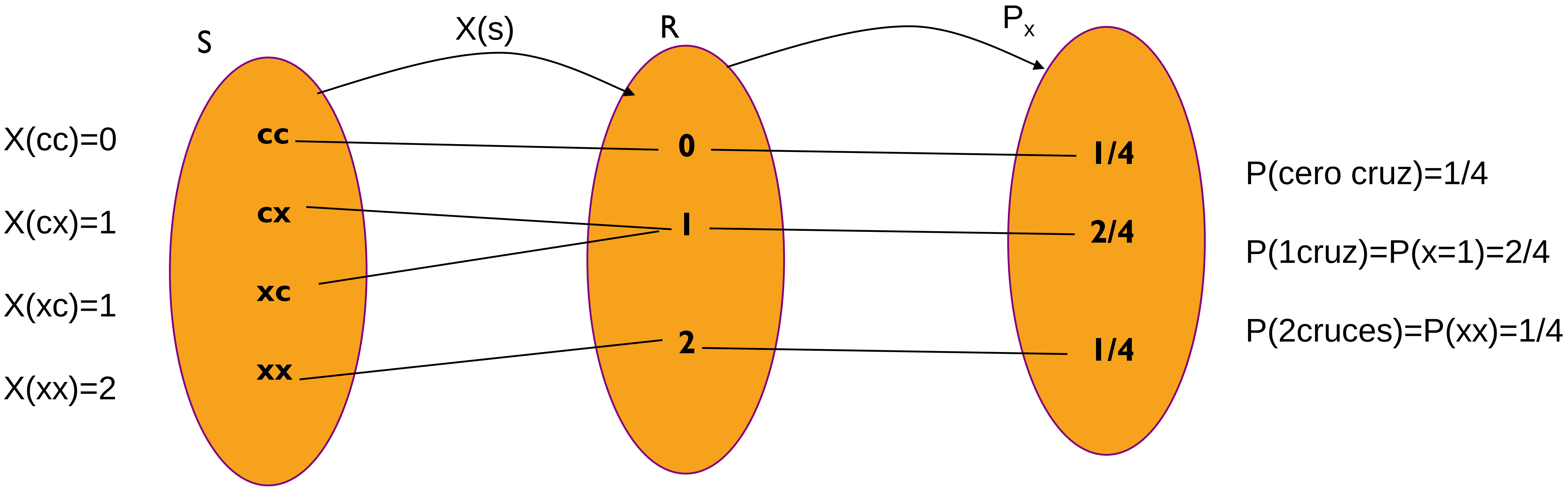



Rx: se denomina recorrido, entonces… Rx = {0, 1, 2}

(Número de cruces)

# Variables Aleatorias

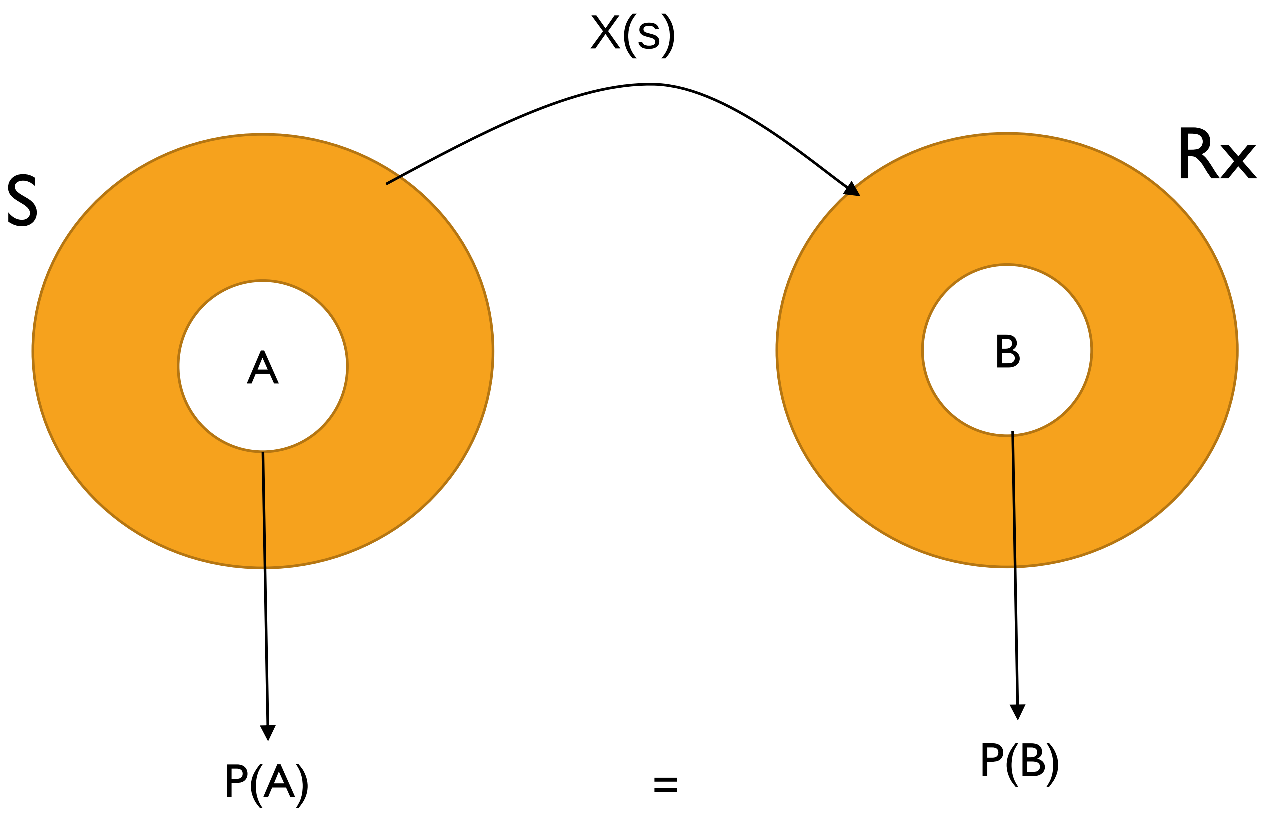
P(x) es una función que asigna a cada suceso un número real de probabilidad que cumple con los axiomas vistos en la teoría axiomática de probabilidad.




Si sumamos las tres posibilidades la suma da 1 porque se han considerado todos los casos posibles

**Consideremos ahora A: {xx} y B:{2} entonces P(A)=1/4 y P(B)=1/4**

# Variables Aleatorias




P(A)=P(B) por lo que estos **sucesos son equivalentes**.

**Vamos a ver algunas definiciones:**

- **Variable Aleatoria:** sea un experimento **E** y el espacio muestral **S** asociado con dicho experimento aleatorio. Se llama variable aleatoria a una función **X** que asigna un número real **X(s)** a cada elemento s $\varepsilon$ **S**.

- **Recorrido (Rx):** es el conjunto de todos los valores posibles de la variable aleatoria **X.**

- **Sucesos Equivalentes:** sean E y S un experimento aleatorio y su espacio muestral asociado, X una variable aleatoria definida en S y Rx su recorrido. Sean B $\subset$ Rx: Supongamos

  **A** = $\{$ s $\varepsilon$ **S** / **X(s)** $\varepsilon$ **B** $\}$

  Entonces **A** y **B** son sucesos equivalentes.

  En este caso **P(A)** = **P(B)**

- **Probabilidad:** dados **E** y **S**, experimento aleatorio y su espacio muestral asociado, es **P** una función que asigna a cada suceso **A** $\subset$ **S** un número real **P(A)** que cumple con los tres axiomas vistos.

- **Distribución Probabilística:** es una distribución de probabilidades, cada una de las cuales está asociada con uno de los posibles valores diferentes de la variable aleatoria. Se cuenta con ella cuando se conocen <u>todos los valores posibles</u> de la variable aleatoria y <u>las probabilidades asociadas con cada uno</u> de estos valores posibles.

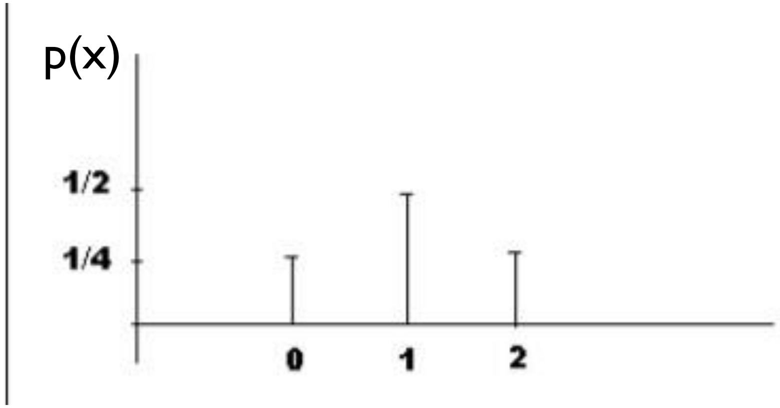
# Variables Aleatorias

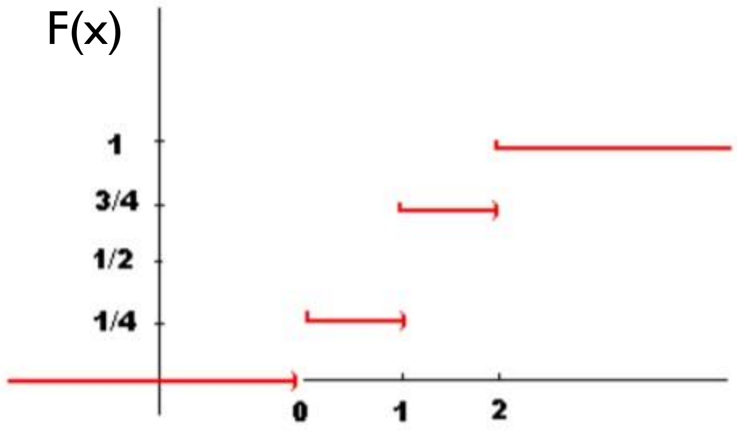
| R(x) | p(x) | F(x) |
|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/4 |
| 1 | 2/4 | 3/4 |
| 2 | 1/4 | 4/4 |
| Total | 1 | ------ |

(Contar n° de cruces)  Probabilidad asociada

F(x) es la función de probabilidad acumulada

Siendo que se trata de una variable discreta se pueden realizar los gráficos tanto de la probabilidad como de F(x), tal como se realizó en estadística descriptiva. La **gráfica de probabilidad** son **palotes** y la probabilidad **acumulada** un gráfico **escalonado** creciente que se denomina función de distribución acumulada para variable discreta. Veamos los gráficos:




¿Cuál será la probabilidad de que salga al menos de una cara?

**$P(x \geq 1)=1-P(x=0)=1-1/4=3/4=0,75$**

## Para variable Discreta

Función de cuantía o función de masa

Verifica:

1. $p(x_i) \geq 0, \quad \forall i = 1,....n$

2. $\Sigma p(x_i) = 1$

para n = número total de valores posibles de X

Se la define como:

$$Px(x) \begin{cases} P(x_i), \ \forall i = 1,....n \\ 0, \ \text{en otro caso} \end{cases}$$

## Función de Distribución para variable Discreta

$$P(X \leq m) = F(X=m) = F(m) = \sum_{x \leq m} p(x)$$

# Propiedades de la F(x)

a. $0 \leq F(X) \leq 1, \quad \forall x$

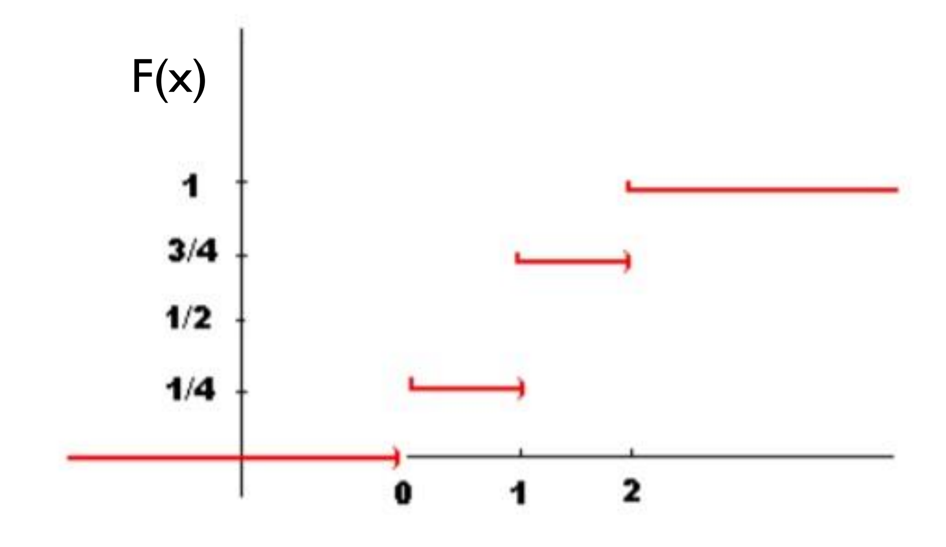
b. $F(-\infty) = 0$

$\forall x \ \varepsilon$ al intervalo de definición.

$F(+\infty) = 1$

Función monótona no decreciente.

c. $F(X=m) = F(m) = \sum_{x \leq m} p(x) \ \forall x \leq m$



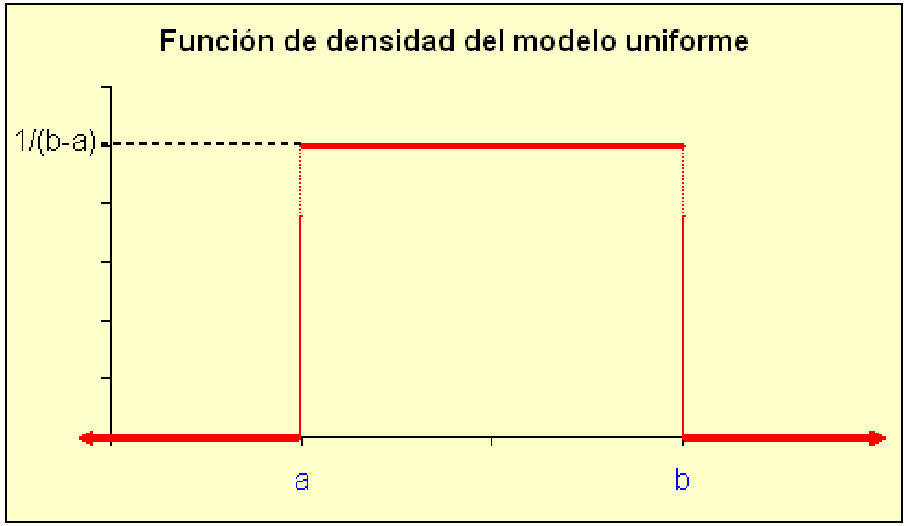
## Variable Aleatoria Continua denominada función de densidad (fdd)

El conjunto de posibles valores es no numerable. Puede tomar todos los valores de un intervalo. Son el resultado de medir.

### DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA O RECTANGULAR

La distribución uniforme continua es el equivalente continuo de la uniforme discreta y su función de densidad de probabilidad es la siguiente:

# Variable Aleatoria Continua




Para que sea función de probabilidad

el área bajo la curva debe de dar uno, es decir ÁREA= (b-$a$) . c=1 de allí que c=1/(b-$a$) en el intervalo $a$≤x≤b.

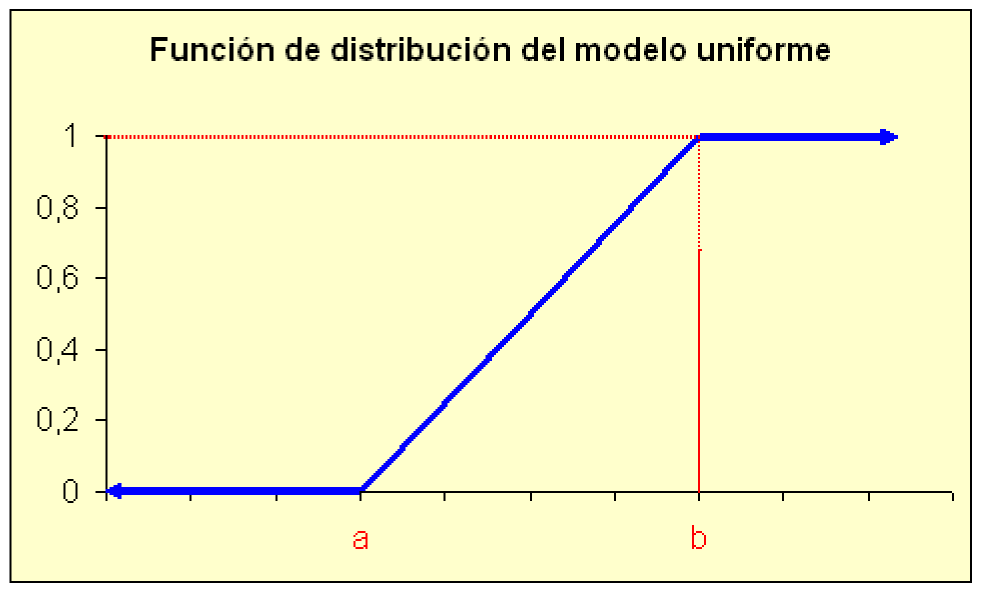
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Es decir es constante sobre un intervalo y esta constante es el reciproco de la longitud del intervalo para que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Para hallar la distribución de probabilidad acumulada, se tiene:

# Variable Aleatoria Continua




$$P(X \le x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \left.\frac{t}{b-a}\right|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

Es decir que $F(x) = \begin{cases} 0 & si & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si & a < x < b \\ 1 & si & x \ge b \end{cases}$

Para que una función sea Función de densidad debe verificar que:

**Verifica:**

1. $f(x) \geq 0, \quad \forall i\ x\varepsilon\ (-\infty, +\infty)$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$$

3. Si A: $\{X/a \le X \le b\}$ en consecuencia,

$$P(A) = \int_a^b f(x)dx \qquad \forall a<b$$

# ESPERANZA Y VARIANZA

- $\overline{x}$: media aritmética de la muestra.
- $S^2$: varianza muestral.
- S: desvío estándar muestral
- $\mu$: media aritmética de la población.
- $\sigma^2$: varianza poblacional.
- $\sigma$: desvío estándar poblacional.

¿Cuáles son los parámetros y cuáles los estimadores?

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\boxed{\sum f_i}} = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i$$

Donde $h_i = f_i / n$, frecuencia relativa

**N**

# ESPERANZA Y VARIANZA

**Probabilidad** de que ocurra un evento es la frecuencia relativa con la que puede esperarse que ocurra un evento.

**Frecuencia relativa** es la frecuencia absoluta relativa al total de elementos observados y/o analizados.

**Frecuencia relativa esperada**, representa la que ocurrirá a largo plazo.

...
y entonces podemos definir la media aritmética y la varianza de esa distribución en términos de probabilidad que son:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \sum_{\forall x} \left[ x.p(x) \right] \\ \mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx \end{aligned}\right\} E(x)$$

...y

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 &= E(x-\mu)^2\, p(x) \\ \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \end{aligned}\right\} Var(x)$$

Denominamos **Esperanza de X** o valor esperado de x para variable aleatoria discreta y continua, respectivamente.

Denominamos **Varianza de X** para variable aleatoria discreta y continua, respectivamente.

**$Var(x)=\sigma^2= E[(X-E(X))^2]= E(X^2) - [E(X)]^2$**

**Ejemplo 1:** Una determinada marca de perfumes, ante la competencia existente en el mercado para la venta de perfumes, ha decidido rebajar sus precios con el fin de aumentar las ventas y disminuir sus existencias. El director comercial ha estimado la siguiente distribución de probabilidad del número total X lotes de frascos de perfume, que se venderán el próximo mes después de rebajar los precios.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0,05 | 0,15 | 0,35 | 0,25 | 0,20 |

Obtener el número medio y la desviación estándar del número de lotes de frascos de perfume que espera vender.

$$\mu = E[X] = \sum_{X=0}^{X=4} x_i P(x_i) = 0\cdot(0,05) + 1\cdot(0,15) + 2\cdot(0,35) + 3\cdot(0,25) + 4\cdot(0,20) = 2,4$$

Var(x)=$\sigma^2$= E[(X-E(X))$^2$] = E(X$^2$) – [E(X)]$^2$

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{x=4} X_i^2\, P(X_i) =$$

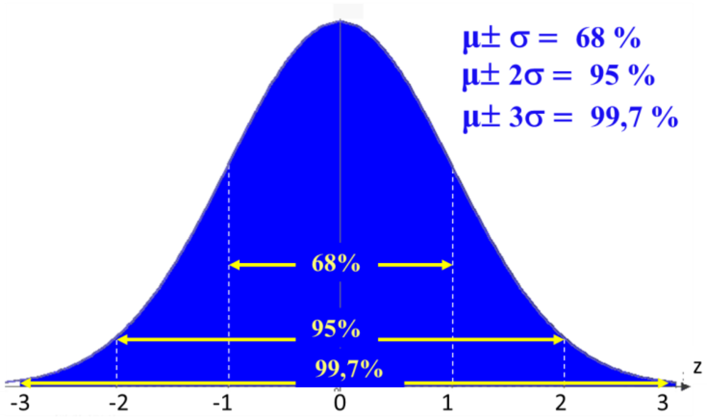
$= 0^2 . (0,05) + 1^2 . (0,15) + 2^2 . (0,35) + 3^2 . (0,25) + 4^2 . (0,20)$

$= 0 + 1 . (0,15) + 4 . (0,35) + 9 . (0,25) + 16 . (0,20)$

$= 7$

Luego: $\sigma_x^2 = Var\,(X) = 7 - (2,4)^2 = 1,24$

$\sigma_x = \sqrt{1,24} = 1,11$




La varianza no se puede interpretar. Se puede interpretar el desvío estándar tal como se interpreta en estadística descriptiva.

**Ejemplo 2:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verifique que se trata de una función densidad de una cierta variable aleatoria continua.
b) Calcular P (0<x<1/2) y P(1/2<x<1), relacionar
c) Calcule la esperanza y la varianza.

*__Solución__*

a) La función *f(x)* es una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria continua X, definida en el conjunto de números reales R, si cumple con:

1.- $f(x) \geq 0, \text{ para toda } x \in R$

2.- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3.- $p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

Efectivamente *f(x)* ≥x, y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} 2x\, dx = \frac{2x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$ por lo que es función de probabilidad

Si es fdd (función de densidad), la probabilidad en un intervalo es la integral de *f(x)* entre los extremos:

**b.-** $$P(0 < x < 1/2) = \int_{0}^{1/2} f(x)\, dx = \int_{0}^{1/2} 2x\, dx = \frac{2x^2}{2}\Big|_0^{1/2} = 2\frac{(1/2)^2}{2} - 2\frac{(0)^2}{2} = 1/4$$

$P(1/2 < x < 1) = \int_{1/2}^{1} f(x)\, dx = 1 - 1/4 = 3/4$ Al sumar las dos opciones se cumple que $P(0 < x < 1) = 1$

**c)** Esperanza de x, $$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, .\, f(x)dx = \int_{0}^{1} 2x^2\, dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = 2/3$$

Varianza de x, Var(x)=$\sigma^2$= E($X^2$) – [E(X)]$^2$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, .\, f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 . 2x)\, dx = \int_{0}^{1} 2(x^3)\, dx = \frac{2x^4}{4}\Big|_0^1 = 2/4 = 1/2$$

Reemplazando en Var(x) se obtiene Var(x)=1/2-$(2/3)^2$= 1/18

**Ejemplo 3**

Si X es una variable aleatoria discreta tal que:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x_i)$ | 0,1 | 0,1 | 0,35 | 0,25 | ……. |

**a)** Completar el valor faltante; ¿ de qué tipo es la variable?
**b)** Calcular la función de distribución acumulada;
**c)** Determinar P(X ≥ 2);
**d)** Graficar la función de cuantía y la función de distribución acumulada;

## *Solución:*

observemos que la variable en estudio es una *variable aleatoria discreta*

**a)** Para resolver este punto debemos recordar una de las condiciones para que una función sea una función de probabilidad puntual o función de cuantía: *la suma de las probabilidades puntuales es igual a uno*, simbólicamente

$$\sum_{i=0}^{n} p(x_i) = 1$$ En nuestro caso $$\sum_{x_i=0}^{4} p(x_i) = 1 \qquad p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=1$$

reemplazando por los valores de tabla nos queda: 0,1+ 0,1+ 0,35 + 0,25 + $p$(4) = 1, despejando obtenemos: $p$(4)=1 - 0,1 - 0,1 - 0,35 - 0,25.

**Por lo tanto el valor faltante es: p(4)=0,2**

**b)** La función de distribución acumulada (**F($x_i$)**).

Por ejemplo si queremos F(2), usamos la función de probabilidad puntual, de la siguiente manera:

$$F(2) = P(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0,1 + 0,1 + 0,35 = 0,55$$

Repitiendo este procedimiento para cada valor de la variable se obtiene la función de distribución acumulada.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| p($x_i$) | 0,1 | 0,1 | 0,35 | 0,25 | 0,2 |
| F($x_i$) | 0,1 | 0,2 | 0,55 | 0,80 | 1,0 |

**c)** Nos están preguntando la probabilidad de que la variable tome valores mayores o iguales a dos. Este ítem se puede resolver de dos formas

1) Utilizando la función de cuantía y sumando cada probabilidad puntual

$$P(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = 0,35 + 0,25 + 0,2 = 0,8$$

2) Utilizando la función de distribución y aplicando las propiedades de que la suma de todas las probabilidades es uno y  de sucesos mutuamente excluyentes:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,2 = 0,8$$

Obsérvese que **la probabilidad P(X<2) = P(X≤1) porque la variable es discreta y no toma valores entre 1 y 2.**

$$P(X \geq 2) = 0,8$$

# DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD

**La distribución de probabilidad** de una variable aleatoria describe cómo se distribuyen las probabilidades de los diferentes valores de la variable aleatoria.

Para una **variable aleatoria discreta (x),** la distribución de probabilidad se describe mediante una función de probabilidad, representada por **f(x).** La función de probabilidad define la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria.

Experimento Bernoulli

Distribución Binomial

Distribución Hipergeométrica

Distribución de Poisson

# EXPERIMENTO BERNOULLI

- **Un experimento de Bernoulli tiene exactamente dos posibles resultados, denotados por Éxito (1) o Fracaso (0), con probabilidades p y q = 1-p respectivamente.**

  - **MANUFACTURA. Un producto es clasificado como defectuoso o no defectuoso.**
  - **VOTACIONES. Respuestas: Sí o No**

# EXPERIMENTO BERNOULLI

Suponga que seleccionamos un tubo de ensayo y lo clasificamos según esté defectuoso (D) o no defectuoso (ND), ambos resultados son:…...**mutuamente excluyentes o se da uno o se da el otro**

Si nos interesa analizar el suceso Defectuoso (D) lo denominaremos éxito, consideremos a la probabilidad de defectuoso (p) y a la probabilidad de no defectuoso (q), entonces:

P(D o ND)= P(D) + P(ND) =1 dado que completa el espacio muestral.

Se puede considerar que P(D)=p entonces P(ND)=1-p, por ser sucesos….

**complementarios.**

Como nos interesa el resultado defectuoso le asignamos el número 1 y 0 para el resultado no defectuoso.

Elaboremos la siguiente tabla:

# EXPERIMENTO BERNOULLI

| Resultados del experimento | x | p(x) | x . p(x) | $x^2$ p(x) |
|---|---|---|---|---|
| D (defectuoso) | | | | |
| ND (No defectuoso) | | | | |
| Total | | | | |

¿Qué valores toma x? ¿Qué valores toma p(x)?

| Resultados del experimento | x | p(x) | x . p(x) | $x^2$ p(x) |
|---|---|---|---|---|
| D (defectuoso) | 1 | p | | |
| ND (No defectuoso) | 0 | 1-p | | |
| Total | | 1 | | |

# EXPERIMENTO BERNOULLI

| Resultados del experimento | x | p(x) | x . p(x) | $x^2$ p(x) |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| D (defectuoso) | 1 | p | 1*p=p | $1^2$ p=p |
| ND (No defectuoso) | 0 | 1-p | 0*(1-p)=0 | $0^2$ (1-p)=0 |
| Total | | 1 | p | p |

Si calculamos la esperanza obtenemos: $E[X] = \sum_{i=1}^{2} x_i\, P(x_i) = 1 \cdot (p) + 0 \cdot (1-p) = p$

Para calcular la varianza debemos calcular primero: $E[X^2] = \sum_{i=1}^{2} x_i^2\, P(x_i) = 1^2 p + 0^2 (1-p) = p$

Var(x)= $E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p\,(1-p)$

# En resumen

Un experimento Bernoulli es un experimento aleatorio que tiene dos resultados posibles, que se denominan arbitrariamente éxito y fracaso y son mutuamente excluyentes. La probabilidad de éxito es p y la probabilidad de fracaso es q de fracaso que se puede obtener como $q = 1 – p$ por ser sucesos complementarios.

Esperanza de x, $E(x)=p$

Varianza de x, $Var(x)= p. q= p. (1-p)$

A partir de las **pruebas de Bernoulli** , se generan distintos modelos de probabilidad, algunos de ellos muy utilizados**.**

# DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Si al experimento Bernoulli lo repetimos “n” veces,

los experimentos tienen dos resultados posibles mutuamente excluyentes,

y las respuestas son independientes por lo que las probabilidades se mantienen constantes

se llama Distribución Binomial.

En el wordpress tienen
TABLA DE CONDICIONES DISTRIBUCIONES DISCRETAS CONDICIONES DIST. DISCRETAS BER-BI-HIP-POISSON

# DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

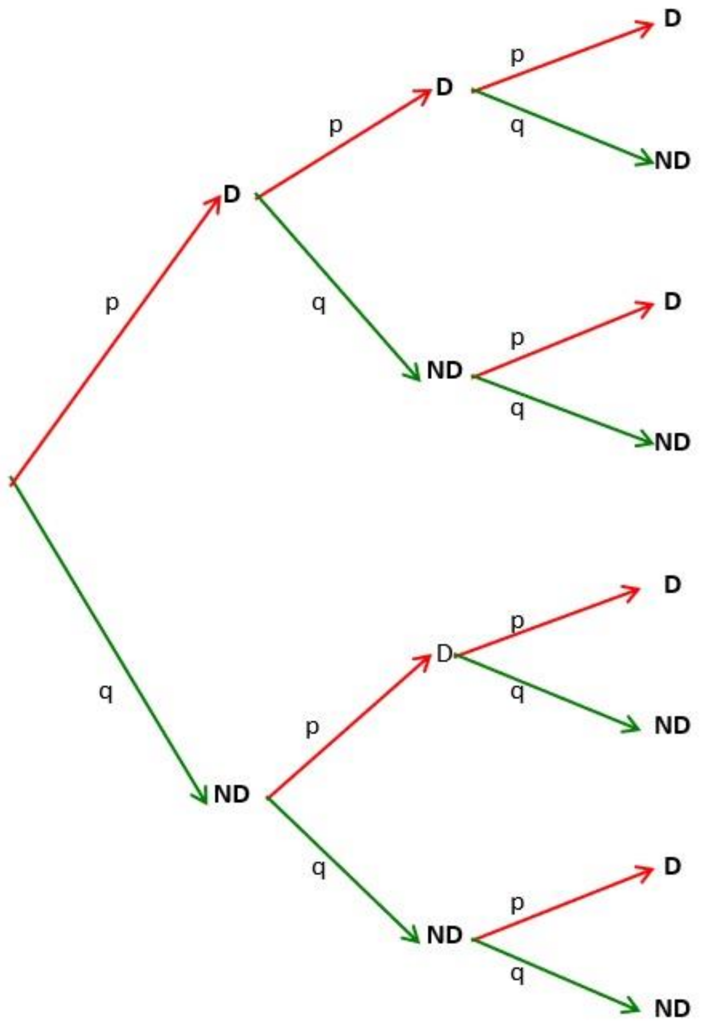
Partimos de un ejemplo utilizando todo lo que conocemos para llegar una expresión reducida que nos permitirá calcular las probabilidades. **El ejemplo se hace por única vez** para entender como se obtiene la expresión reducida que utilizarán cuando realicen los ejercicios.

Consideremos que el experimento Bernoulli anterior se repite 3 veces , es decir que seleccionamos tres tubos de ensayo y los clasificamos según estén defectuoso (D) o no defectuoso (ND), ambos resultados son:…..**mutuamente excluyentes o se da uno o se da el otro.**

Si nos interesa analizar el suceso Defectuoso (**D**) lo denominaremos éxito, consideremos a la probabilidad de defectuoso **(p)** y a la probabilidad de no defectuoso **(q)**

# DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Seleccionamos **3** tubos de ensayo (**de un lote muy grande**) y los clasificamos como defectuoso (D) o no defectuoso (ND), ¿cómo lo podemos representar? ¿Diagrama del árbol, tabla doble entrada, diagrama de Venn?




Si definimos la variable aleatoria "x: número de tubos defectuosos" ¿Qué valores puede tomar x? 0,1,2,3

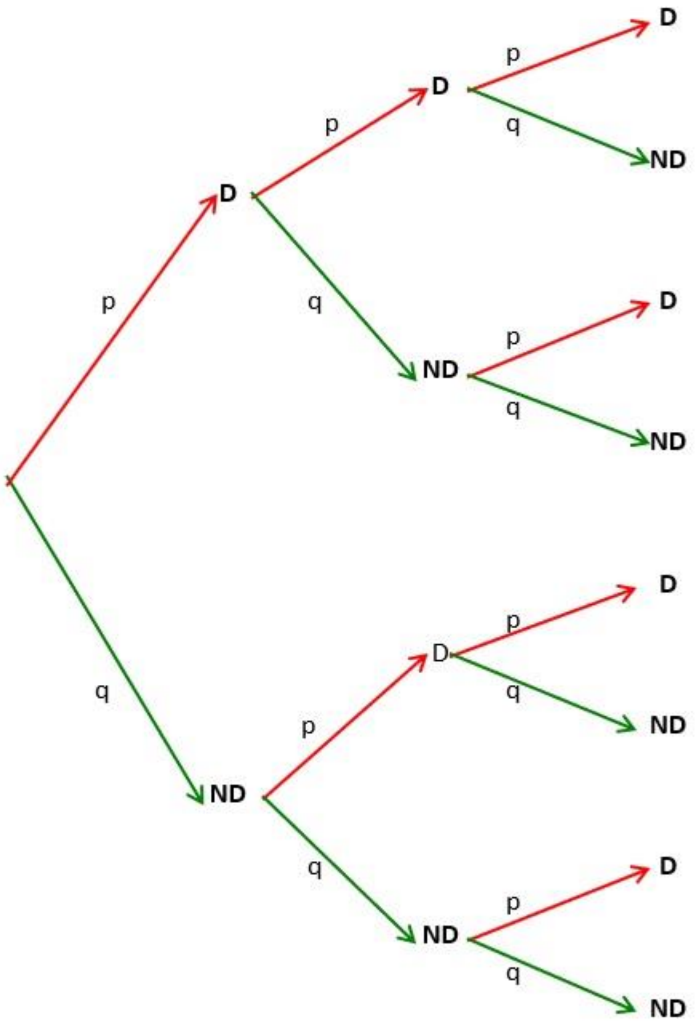
| | |
|---|---|
| **Para calcular P(n° de éxitos=0) es lo mismo que:**<br>**P(n° de defectuosos=0)=P(x=0)**<br><br>Calculadora:<br>1° número + nCr + 2° número | **Contamos las ramas en que no hay ningún éxito, es decir ningún defectuoso. Hay una, (ND,ND,ND). Se puede calcular como**<br><br>$\binom{3}{0} p^0 q^3$**=1.q.q.q** |

Recuerden que: $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ para el cálculo x≤n

Entonces la fórmula para P(x=0)= $\binom{3}{0} p^0 q^3 = 1.q.q.q$

# DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Seleccionamos tres tubos de ensayo y los clasificamos según estén defectuoso (D) o no defectuoso (ND).
"X: número de tubos defectuosos".




| | |
|---|---|
| **Para calcular P(n° de éxitos=1) es lo mismo que:**<br>**P(n° de defectuosos =1)=P(x=1)** | **Contamos las ramas con 1 éxito. Hay 3.**<br>**(D,ND,ND), (ND,D,ND), (ND,ND,D),**<br>**Multiplicamos el número de ramas por la probabilidad de cada una que siempre es:p.q.q** |

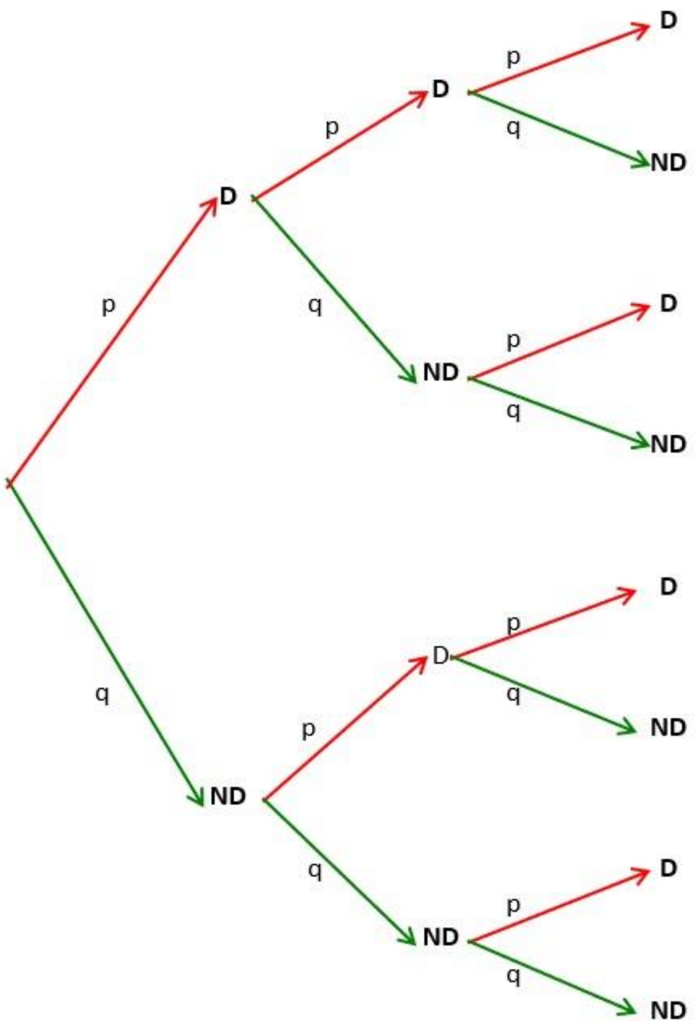
Entonces la fórmula para P(x=1)= $\binom{3}{1}p^1q^2$=3.p.q.q

| | |
|---|---|
| **Para calcular P(n° de éxitos=2) es lo mismo que:**<br>**P(n° de defectuosos =2)=P(x=2)** | **Contamos las ramas con 2 éxitos. Hay 3.**<br>**(D,D,ND), (D,ND,D), (ND,D,D),**<br>**Multiplicamos el número de ramas por la probabilidad de cada una que siempre es:p.p.q** |

Entonces la fórmula para P(x=2)= $\binom{3}{2}p^2q^1$=3.p.p.q

# DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Seleccionamos tres tubos de ensayo y los clasificamos según estén defectuoso (D) o no defectuoso (ND).
“X: número de tubos defectuosos”.




| Para calcular P(n° de éxitos=3) es lo mismo que: P(n° de defectuosos =3)=P(x=3) | Contamos las ramas en que hay 3 éxitos. Hay una. (D, D, D). Se puede calcular como $\binom{3}{3} p^3 q^0$=1.p.p.p |
|---|---|

Generalizando, la distribución Binomial resultado de n realizaciones, con probabilidad de éxito p se escribe así:

$$\text{Bin (x=.. p=.,n=..)=} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

La esperanza surge de considerar la esperanza del experimento Bernoulli “n” veces, entonces la esperanza de la Binomial es:

**Esperanza** de x, E(Bin)=n.p

**Varianza** de x, Var(Bin)= n p q= n. p. (1-p).

# DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

**Ejemplo 1:** Si el 1% de los artículos producidos son defectuosos,

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un artículo defectuoso al inspeccionar 10 artículos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos un artículo defectuoso al inspeccionar 10 artículos?

Para resolver este ejercicio debemos pensar que al inspeccionar un lote estamos realizando un experimento Bernoulli, con probabilidad de éxito=probabilidad de obtener un artículo defectuoso=0,01, que surge de considerar que el 1% de los artículos son defectuosos.

## Condiciones

- El experimento básico se repite un número finito de veces **n**. (*se seleccionan para inspeccionar 10 artículos)*
- Existen dos resultados posibles; Éxito o Fracaso. Éxito (Artículo defectuoso) o fracaso (Artículo **no** defectuoso). (mutuamente excluyentes)
- Las respuestas son independientes. (La aparición de un artículo defectuoso no modifica a la probabilidad de obtener otro artículo defectuoso).
- Las probabilidades se mantienen constantes (la población de artículos es muy grande).

# DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

| En general | En términos del problema |
|---|---|
| **x: variable aleatoria número de éxitos** | x: número de artículos defectuosos. |
| **n: número de veces que se repite el experimento básico.** | n: se seleccionan 10 artículos para inspeccionar. |
| **p: probabilidad de éxito** | p: probabilidad de encontrar un artículo defectuoso. |

Podemos calcular la probabilidad de que al escoger **n** artículos aparezcan **x** defectuosos (con **x** entre 0 y 10).

a) Bin (x=1, p=0,01,n=10)=$\binom{10}{1}(0{,}01)^1(0{,}99)^9$=**0,0914**

La probabilidad de obtener un artículo defectuoso al inspeccionar 10 artículos es 0,0914.

b) Pide P(x≥1)= P(x=1)+P(x=2)+…..+P(x=10) serían muchos cálculos que se pueden resolver con el complemento, entonces:

Bin(x≥1, p=0,01, n=10)= 1 – Bin(x=0, p=0,01, n=10)=1-$\binom{10}{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{10}$=**0,0956**

La probabilidad de obtener por lo menos un artículo defectuoso al inspeccionar 10 artículos es 0,0956.

# DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

**Ejemplo 2:** Una inmobiliaria dedicada a la venta de departamentos realizó un estudio de ventas, y comprobó que sólo el 5% de las personas que acuden a visitar el piso piloto acaba comprando un departamento.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 10 visitas haya por lo menos dos compras?
b) ¿Cuál es el número esperado de departamentos que se venderán en 100 visitas?

a) Realizamos un experimento Bernoulli con 10 repeticiones, con probabilidad de éxito 0,05, por lo que la variable "n° número de éxitos" sigue una Distribución Binomial.

Bin(x≥2, p=0,05, n=10)= 1– [P(x=0)+P(x=1)]=

$$=1-\left[\binom{10}{0}(0{,}05)^{0}(0{,}95)^{10}+\binom{10}{1}(0{,}05)^{1}(0{,}95)^{9}\right]=1-[0{,}5987+0{,}3151]= \mathbf{0{,}0862}$$

La probabilidad de que entre 10 visitas haya por lo menos dos compras es 0,0862.

b) La esperanza de una Binomial es E(Bin)=100.0,05= 5
Se espera vender en 100 visitas 5 departamentos.

# DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

a.- El resultado de cada experimento básico puede clasificarse dentro de una de las dos categorías, arbitrariamente denominadas éxito y fracaso.

b.- Se realizan “n” ensayos o repeticiones donde “n” es un número finito.

c.- Las repeticiones se realizan sin reposición. Esto significa que <u>no son sucesos independientes</u> pues al no reponer el elemento que se extrajo cambia la composición de la población y en consecuencia cambia la probabilidad de éxito.

Por lo mencionado es necesario en este caso conocer la composición de la población.

Esta población esta formada por “N” elementos de los cuales “K” son éxitos y por lo tanto N-K=fracasos por ser sucesos complementarios.

# DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Si definimos a la variable aleatoria x: Número de éxitos en la muestra de tamaño "n".

Se debe cumplir que n≤N, es decir que se extrae una muestra de tamaño "n" de una población con "N" elementos sin reposición, en consecuencia, como máximo contendrá a todos los elementos de la población.

El conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria x es X: {0, 1, 2, …..n}

El objetivo es calcular la probabilidad de encontrar "x" éxitos en una muestra con "n" elementos.

$$N \begin{cases} K \text{ (cantidad de éxitos de la población)} \\ N-K \text{ (cantidad de fracasos de la población)} \end{cases} \qquad n \begin{cases} x \text{ (cantidad de éxitos de la muestra)} \\ n-x \text{ (cantidad de fracasos de la muestra)} \end{cases}$$

# DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Si consideramos la teoría clásica de probabilidad, necesitamos encontrar el total de casos posibles, es decir ¿cuántas muestras de "n" elementos distintos se pueden obtener de la población "N".

Donde la probabilidad se calcula como= $\frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles}$

a) Total de casos posibles. ¿Cuántas muestras de "n" elementos diferentes se pueden obtener de la población $\binom{N}{n}$

b) Total de casos favorables: es decir ¿cuántas de esas muestras de "n" elementos tienen "x" éxitos y en consecuencia (n-x) fracasos. Los "x" éxitos se debe extraer de los "k" éxitos de la población entonces $\binom{K}{x}$ y

los (n-x) fracasos de la muestra de entre los (N-K) fracasos de la población: $\binom{N-K}{n-x}$

Por lo tanto los casos favorables con "x" éxitos **y** los restantes fracasos son:

# DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

$$\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}$$

Por lo que se deduce que la probabilidad de éxitos es:

$$Hip(N,K,n,x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

considerando que (n≤N) y (x≤K) para x=0, 1, …..n

Para calcular la probabilidad de “x” éxitos es necesario conocer:

N: tamaño de la población o cantidad de elementos que componen la población

K: cantidad de “éxitos” en la población

n: tamaño de la muestra o cantidad de elementos de la muestra

# DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Esperanza de la Hipergeométrica: E(Hip)= n (k/N)

siendo "n" la cantidad de elementos de la muestra y (k/N) la probabilidad de éxito.

$$\text{Var(Hip)} = n\,\frac{k}{N}\,\frac{(N-K)}{N}\,\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

Siendo "n" la cantidad de elementos de la muestra, (k/N) la probabilidad de éxito y

$\frac{(N-K)}{N}$ la probabilidad de fracaso.

$\frac{(N-n)}{(N-1)}$ se denomina factor de corrección para población finita (lo veremos más adelante).

# DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

**Ejemplo 3:** Una caja que contiene 20 pipetas tiene 5 defectuosas. Si 10 de ellas son aleatoriamente escogidas para revisión, ¿Cuál es la probabilidad que dos de ellas sean defectuosas?

Como las extracciones son sin reposición y se conocen los datos de la población cumpliéndose las condiciones de una distribución Hipergeométrica:

- El experimento básico se repite un número finito de veces **n**.
- Existen dos resultados posibles; Éxito o Fracaso (mutuamente excluyentes)
- Las respuestas son **dependientes.** Las probabilidades **no** se mantienen constantes.

Escribir los elementos del modelo en general y en términos del problema

# DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

| En general | En términos del problema |
|---|---|
| **x: variable aleatoria número de éxitos** | x: número de pipetas defectuosos. |
| **n: número de veces que se repite el experimento básico.** | n: se seleccionan 10 pipetas para revisar. |
| **N: cantidad de elementos de la población** | N: cantidad de pipetas que contiene la caja (20) |
| **K: Número de éxitos en la población** | K: Número de pipetas defectuosas en la caja (5) |

$$Hip(N,K,n,x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$Hip\ (N = 20, K = 5, n = 10, x = 2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{20-5}{10-2}}{\binom{20}{10}} = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{8}}{\binom{20}{10}} = 0{,}348$$

Al extraer 10 pipetas de una caja que contiene 20 pipetas (de las cuales 5 eran defectuosas), la probabilidad de que dos sean defectuosas es 0,348.

# DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La distribución de Poisson se emplea para describir varios procesos, entre otros:

⇒ El número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta (suficientemente distantes de los semáforos) durante un periodo definido de tiempo.

⇒ El número de errores de ortografía que uno comete al escribir una única página.

⇒ El número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.

⇒ El número de servidores web accedidos por minuto.

⇒ El número de defectos en una longitud específica de una cinta magnética.

⇒ El número de mutaciones de determinada cadena de ADN después de cierta cantidad de radiación.

⇒ El número de defectos por metro cuadrado de tela.

⇒ El número de estrellas en un determinado volumen de espacio.

⇒ Ocurrencia del sismo en un determinado periodo de tiempo.

⇒ El número de camas que un hospital necesita en cuidados intensivos por día.

# DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Cada una de las variables aleatorias representa el número total de ocurrencias de un fenómeno en un continuo. Expresa la probabilidad de un número k de ocurrencias acaecidas en un continuo (por ejemplo, el tiempo) fijo, si estos eventos ocurren con una frecuencia media conocida y son independientes del continuo (por ejemplo, tiempo) discurrido desde la última ocurrencia o suceso.

Esta distribución fue descubierta por Siméon Denis Poisson (1781-1840) y publicada, junto con su teoría de probabilidades, en 1838 en su trabajo *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile*

# DISTRIBUCIÓN DE POISSON

**Ejemplo:** En un determinado punto de recarga de tarjeta “Sube” su dueño sabe por experiencias que pasan a recargar su tarjeta 60 clientes por hora.

a.-¿Cuál es la probabilidad de que lleguen a recargar su tarjeta exactamente 2 clientes en un minuto?.

b.- ¿Cuál es el modelo de probabilidad adecuado para resolver este problema?

-Es posible dividir al intervalo continuo considerado en subintervalos.
-La probabilidad de un acierto permanece constante a lo largo de los intervalos.
-La probabilidad de más de dos aciertos en un subintervalo es suficientemente pequeña como para ignorarla.
-Los aciertos son independientes ya que los intervalos no se superponen.
- La probabilidad de que un acierto sencillo ocurra en un intervalo muy corto es proporcional a la longitud del intervalo.

# DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La distribución de probabilidad de Poisson es una distribución de probabilidad de una variable discreta que nos proporciona la probabilidad de que ocurra un determinado suceso un número de veces "k" en un intervalo determinado de tiempo, espacio, volumen, etc.

Donde el parámetro λ es el número medio de veces que ocurre el suceso en un intervalo continuo que puede ser: tiempo, espacio, volumen, etc. Su función de probabilidad es:

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} \qquad para\ x = 0, 1, 2, 3\ldots.$$

Siendo la letra "e" la base del sistema de logaritmos naturales cuyo valor aproximado es 2,71828.

Para que sea función de probabilidad se debe cumplir:

1. $p(x_i) \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots. n$
2. $\sum p(x_i) = 1$

# DISTRIBUCIÓN DE POISSON

1.- se cumple ya que:

Al ser $\lambda$ el promedio de aciertos que ocurren en un intervalo continuo es $\lambda>0$ entonces

$e^{-\lambda}>0$; $\lambda^x$ siempre es >0 y por propiedad de los números factoriales x! es >0 por lo tanto: $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}>0$

2.- se debe cumplir $\sum p(xi) = 1$
Si la función de distribución acumulada $F(x)= P_x(X)= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ para x εN≥0

$$P_x(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad para\ x = 0, 1, 2, 3....$$

Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Maclaurin de la función exponencial donde: $P_x(x) = e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = e^0 = 1$

**La *esperanza* de la distribución de Poisson es E(Poisson)=λ ; Var(Poisson)=λ**

La demostración de la esperanza y la varianza se encuentra en el archivo denominado:
DISTR. DISCRETAS a4-Poisson. 2017 Corregido

# DISTRIBUCIÓN DE POISSON

## **Veamos el caso I-** Como proceso de Poisson

**Ejemplo:** En un determinado punto de recarga de tarjeta "Sube" su dueño sabe por experiencias que pasan a recargar su tarjeta 60 clientes por hora.
a.-¿Cuál es la probabilidad de que lleguen a recargar su tarjeta exactamente 2 clientes en un minuto?.
b.- ¿Cuál es el modelo de probabilidad adecuado para resolver este problema?

Si consideramos … x: número de sucesos que ocurren en un continuo.

$\lambda$: promedio de aciertos que ocurren en un intervalo continuo

$$P_x(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad para\ x = 0, 1, 2, 3....$$

Se tiene Intervalo continuo: 1 hora (el tiempo es un continuo), dividida en 60 subintervalos (de 1 minuto c/u). Esto define el parámetro $\lambda$ = promedio de aciertos (clientes que ingresan a recargar su tarjeta "Sube") que ocurren en el intervalo continuo (tiempo).

**$\lambda$ = 60 clientes/60 min = 1 cliente/min**

Los aciertos (cantidad de clientes que ingresan a recargar su tarjeta "Sube") son independientes ya que los intervalos no se superponen.

* La probabilidad de que un acierto sencillo ocurra en un intervalo muy corto es proporcional a la longitud del intervalo.

# DISTRIBUCIÓN DE POISSON

**Veamos el caso I-** Como proceso de Poisson

**Ejemplo:** En un determinado punto de recarga de tarjeta “Sube” su dueño sabe por experiencias que pasan a recargar su tarjeta 60 clientes por hora.

a.-¿Cuál es la probabilidad de que lleguen a recargar su tarjeta exactamente 2 clientes en un minuto?.

b.- ¿Cuál es el modelo de probabilidad adecuado para resolver este problema?

Si consideramos … x: nº de sucesos que ocurren en un continuo en este caso la cantidad de clientes que ingresan en un determinado punto a recargar su tarjeta..

Pero ¿cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 2 clientes a recargar su tarjeta en un minuto?

Aplicando la fórmula anterior y reemplazando resulta:

$$P(x=2)=\frac{e^{-1}1^{2}}{2!}=0{,}184$$

La probabilidad de que lleguen exactamente 2 clientes en un minuto es 0,184.

¿Cuál es la probabilidad de que lleguen al menos 2 clientes en un minuto a recargar la tarjeta “Sube”?

$$P(x\geq 2)=1-\left\{\frac{e^{-1}1^{0}}{0!}+\frac{e^{-1}1^{1}}{1!}\right\}=0{,}264$$

La probabilidad de que lleguen al menos 2 clientes en un minuto a recargar la tarjeta “Sube” es 0,264.

Estime el número de clientes que se espera lleguen a un determinado punto de recarga de tarjeta “Sube” en un minuto.

$$E(x)=\lambda=1$$

Se espera que ingrese a recargar su tarjeta “Sube” un cliente por minuto.

# DISTRIBUCIÓN DE POISSON

**Veamos el caso II-**Distribución de Poisson como una aproximación a la Binomial

Cuando una variable aleatoria presenta las características correspondientes a una distribución Binomial y el cálculo resulta difícil o imposible de realizar con la calculadora, se puede aproximar mediante la distribución de Poisson en los casos en que en un proceso aleatorio la probabilidad de ocurrencia "p" sea pequeña (evento poco frecuente) y constante con una gran cantidad de pruebas o muestras "n".

Recordemos que la expresión de la distribución binomiales:

a) Bin (x=.., p=…,n=…)=$\binom{n}{x}(p)^x(1-p)^{n-x}$ para x=0,1,…..n

La distribución Binomial converge a la distribución de Poisson en el límite cuando "n" tiende a ∞, "p" tiende a 0 y "np" permanece constante e igual a λ, entonces sólo a los efectos de realizar el cálculo de probabilidades se utiliza

$$P_x(X) = \frac{e^{-np}\,(np)^x}{x!} \qquad para\; x = 0, 1, 2, 3....$$

La media o esperanza y la varianza, se obtienen mediante el mismo procedimiento, tomando los límites cuando n tiende a ∞, p tiende a 0 y np tiende a λ:

$$E(X) = \lim_{np\to\lambda} np = \lambda \qquad\qquad Var(X) = \lambda$$

La distribución de probabilidad de Poisson proporciona buenas aproximaciones cuando np ≤ 5.

# DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Suponga que una compañía de seguros asegura las vidas de 5000 hombres de 42 años de edad. Si los estudios actuariales muestran que la probabilidad de que un hombre muera en cierto año es 0,001; entonces la probabilidad de que la empresa pague exactamente 4 indemnizaciones en un cierto año es:

np=5000x0,001=5

La condiciones de qué distribución de probabilidad discreta cumple?

Cumple con las condiciones vistas en la distribución Binomial. Si reemplazamos los datos en:

Bin (x=.., p=…,n=…)=$\binom{n}{x}\,(p)^x(1-p)^{n-x}$ para x=0,1,…..n

Bin (x=4, p=0,001,n=5000)=$\binom{5000}{4}\,(0{,}001)^4(1-0{,}001)^{5000-4}$

Bin (x=4, p=0,001,n=5000)=$\frac{5000!}{4!4996!}(0{,}001)^4(1-0{,}999)^{4996}$

$$P_x(X) = \frac{e^{-np}\ (np)^x}{x!} \qquad para\ x = 0, 1, 2, 3\dots$$

np = λ=5000x0,001=5

$$P_x(X=4) = \frac{e^{-5}\ (5)^4}{4!} = 0{,}1745$$

La probabilidad de que la empresa pague exactamente 4 indemnizaciones en un cierto año es 0,1745.

# Aplicación para celular (Apps) a descargar


Tutorial: Distribución Binomial con la Aplicacion Probability Distributions
https://www.youtube.com/watch?v=9A9XpI3zLB4

Tutorial: Distribución Hipergeométrica con la Aplicacion Probability Distributions
https://www.youtube.com/watch?v=pkeFjAxoG9M

Tutorial: Distribución de Poisson con la Aplicacion Probability Distributions
https://www.youtube.com/watch?v=WqFcCr87Oxg

# calculadora estadística on-line y descargable.

Recomendamos CaEst 1.7 cuyo autor es Juan Martinez de Lejarza, es una calculadora estadística on-line y descargable. En la pestaña de probabilidades se encuentran las distribuciones de probabilidad

https://www.uv.es/ceaces/scrips/probabil22.html

La pueden descargar desde: https://www.uv.es/~lejarza/caes/

FIN!!