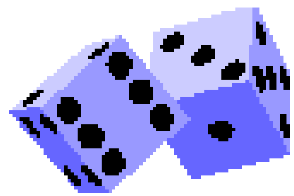
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA SAN JUAN BOSCO

PROBABILIDADES



- Experimento aleatorio
- Espacio muestral (S):
  - Punto muestral (s o a)
  - Tipos de espacios muestrales
  - Valor del punto muestral

- Principio de la adición y multiplicación
- Esquema del árbol y de la Urna
- Sucesos-Clase Exhaustiva
- Teorías de probabilidad
- Eventos Compuestos

Probabilidad

Ejemplos

$\mathcal{E}_1$:arrojar una moneda correcta y observar su cara superior

$$S_1 = \{X, C\}$$

$\mathcal{E}_2$:arrojar un dado correcto y observar su cara superior

$$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$\mathcal{E}_3$:arrojar una moneda correcta hasta observar cara

$$S_3 = \{C, XC, XXC\ldots.\}$$

Ejemplos

ε_4: Observar cuántas personas ingresan a un supermercado en un período de tiempo.

$$S_4 = \{{}^{x}/_{x}\ \varepsilon\ N \wedge x \leq N'\}$$

Siendo (N´) número máximo de personas que pueden ingresar según la superficie del local comercial.

ε_5:arrojar un dardo a un blanco y medir la distancia entre el dardo y el centro

$$S_5 = \{{}^{x}/_{x}\ \varepsilon\ R^{+} \wedge x \leq \text{radio del círculo}\}$$

Dependiendo del número de elementos del espacio muestral, distinguiremos 3 tipos de espacios muestrales:

i) **Espacio muestral discreto finito:** Consta de un número finito de elementos.

ii) **Espacio muestral discreto infinito:** Consta de un número infinito numerable de elementos.

iii) **Espacio muestral continuo:** Consta de un número infinito no numerable de elementos.

Experimento: es una acción, proceso u operación en el que se obtienen resultados bien definidos y que conllevan a la observación de estos resultados.

Resultado: es lo que se obtiene de un solo ensayo del experimento, es decir de una sola repetición del mismo.

Ensayo: es el acto que lleva a un resultado determinado, de entre los posibles resultados distintos del experimento.

Experimento o fenómeno aleatorio: es el experimento en el cuál el resultado se presenta al azar.

Conjunto de todos los resultados del experimento aleatorio: es un conjunto universal.

Espacio muestral: es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
Lo denominamos: **S**

Punto muestral: es un punto del espacio muestral, uno de los resultados posibles del experimento aleatorio. Lo denominamos con a ó s y entonces $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$ ó $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$.

Valor del punto muestral

Consideremos el experimento que consiste en arrojar dos monedas correctas y….

a) Observar la secuencia de caras y cruces

S = {CC, CX, XC, XX}

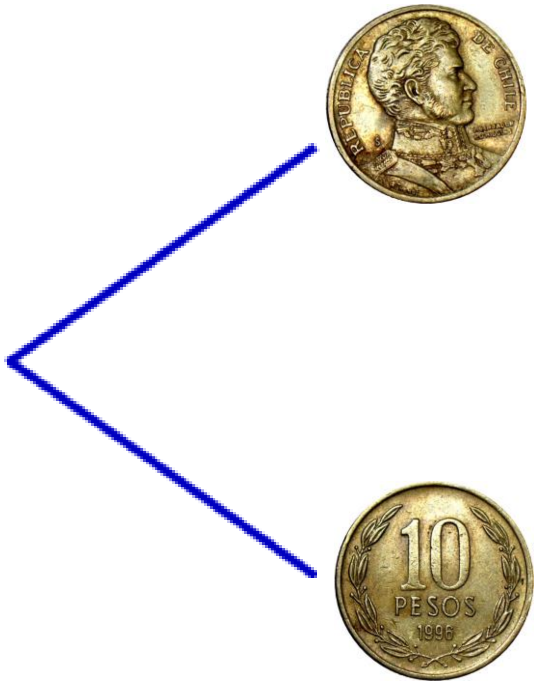
(En este caso el peso para cada punto muestral es 1/4)

b) Contar el número total de cruces obtenido en cada caso

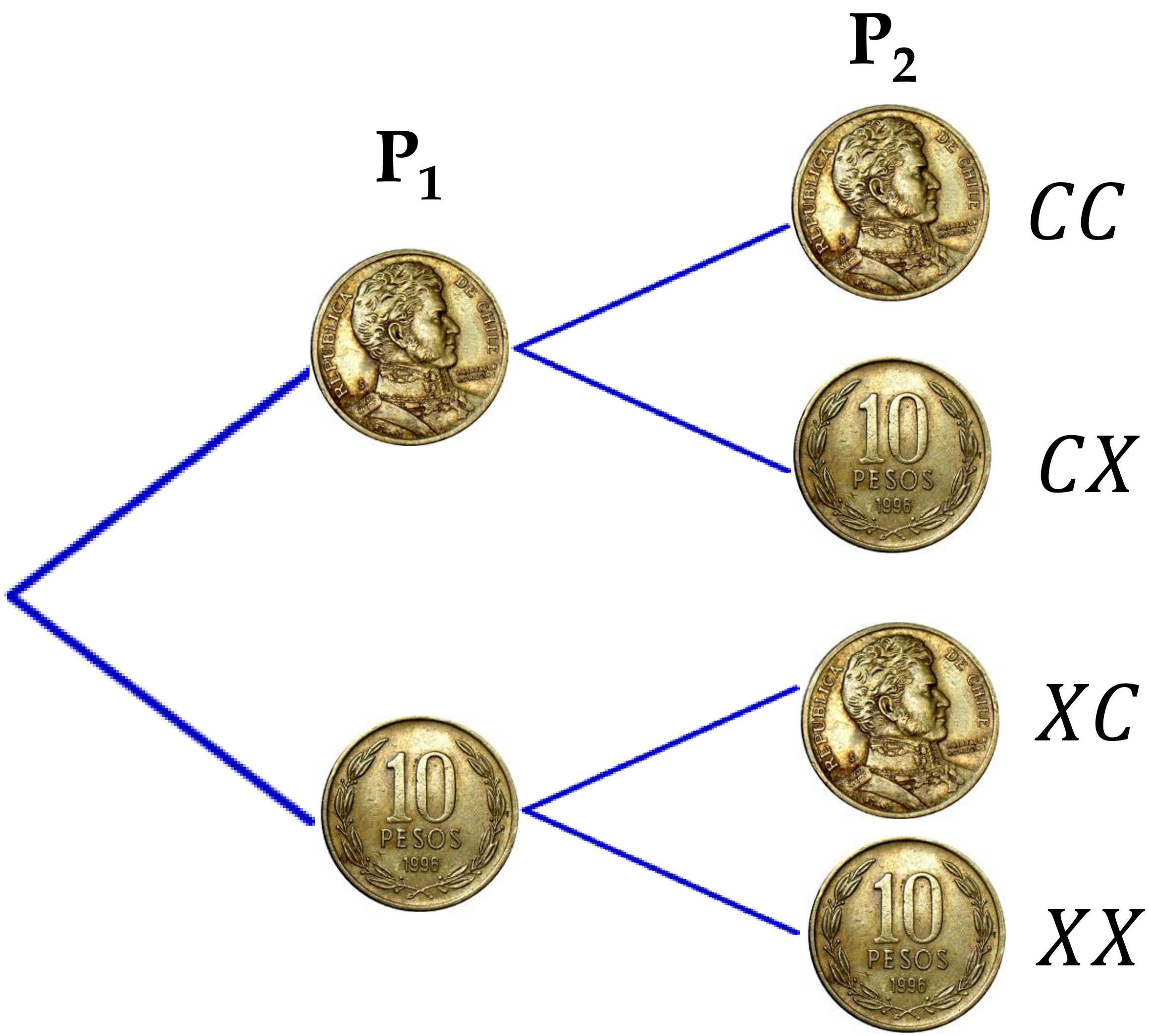
S= {0, 1, 2}

p(obtener "0" cruces)=	p(CC)=**1/4**	
p(obtener 1 cruz)=	p(CX ó XC)=**2/4**	**1**
p(Obtener 2 cruces)=	p(XX)= **1/4**	

P_1

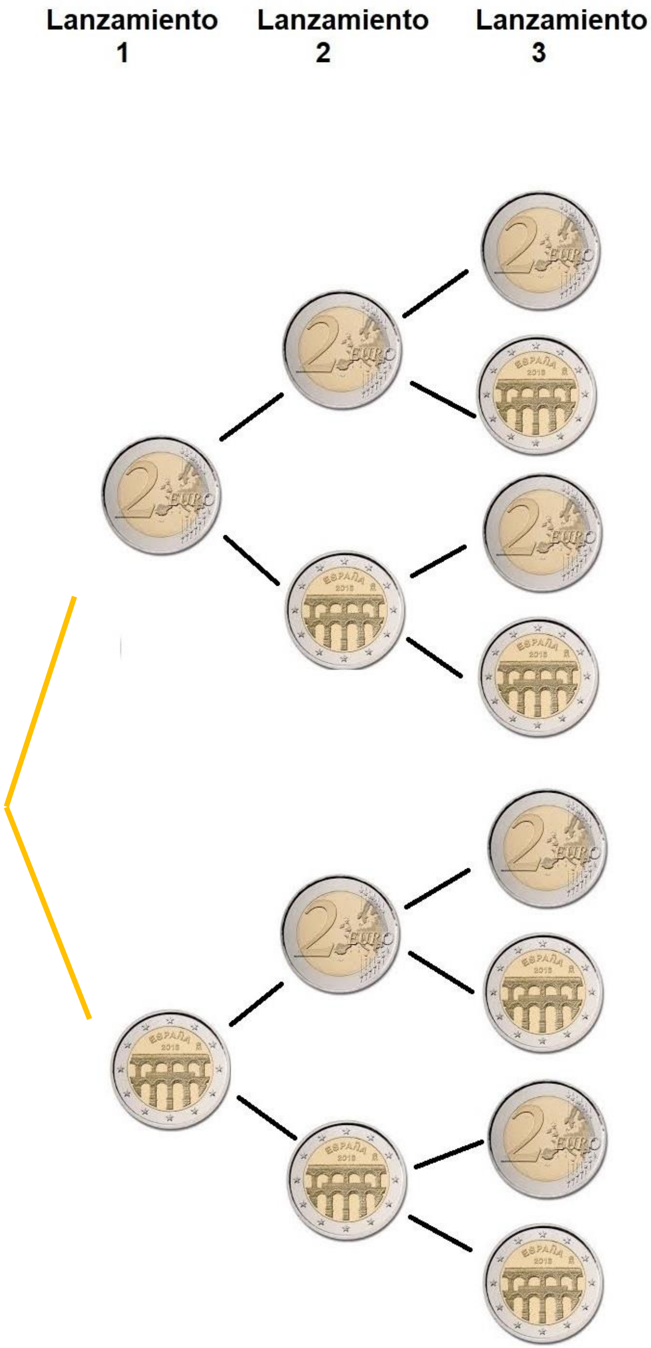


¿Cuántos puntos muestrales se obtienen?



2 resultados 1° tirada **y** 2 resultados en 2° en la segunda tirada

2 **x** 2 = 4



Si hiciéramos el lanzamiento de una moneda 3 veces.
¿Cuántos puntos muestrales se obtienen?

2 resultados 1° tirada **y**
2 resultados en 2° en la segunda tirada **y**
2 resultados 3° tirada

2 **x** 2 **x** 2 = 8

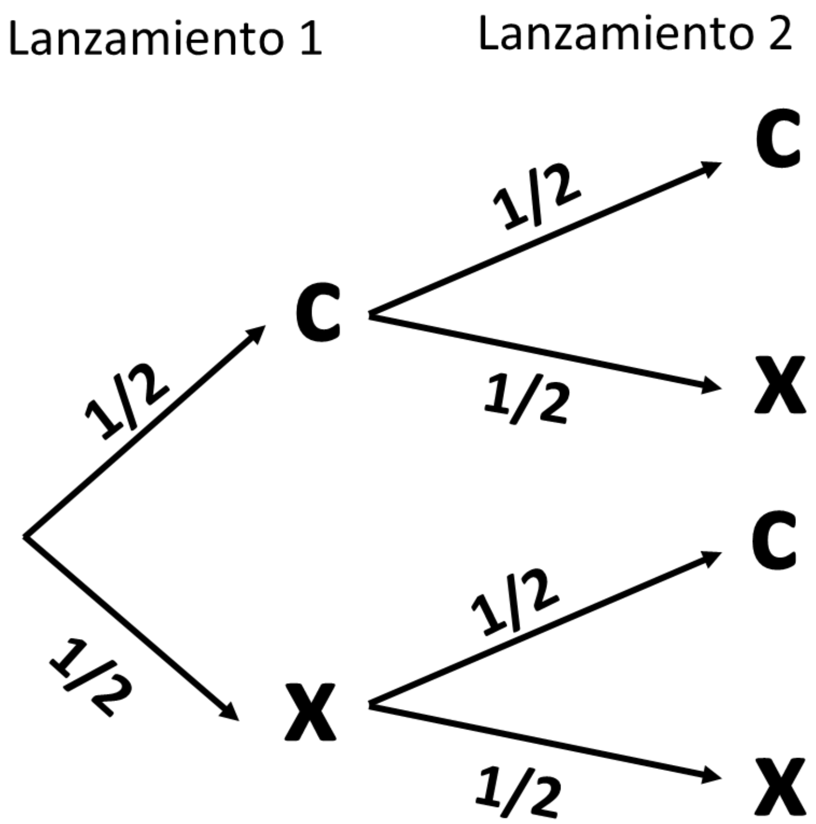
Principio de la multiplicación

Supongamos que estamos en el Centro de Comodoro Rivadavia y queremos llegar a la Universidad, podemos tomarnos la línea Standard Palazzo **ó** la línea Palazzo Standard **ó** la línea 5 Universidad **ó** la línea Restinga Standard **ó**…

Los puntos muestrales de mi espacio muestral S son todas las líneas de colectivos que van desde el Centro hacia la Universidad.

Principio de la adición

ESQUEMA DEL ÁRBOL



Si contamos el número de cruces
¿Cuál es el peso o la ponderación de obtener:

p(cero cruces)=p(“0”)= 1/2 **x** 1/2 = 1/4

p(1 cruz)=p(CX**ó**XC)= p(“1”)=¼ + ¼ =2/4

p(2 cruces)=p(“2”)= 1/2 **x** 1/2 = 1/4

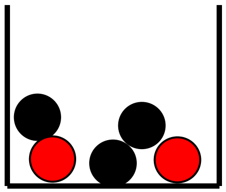
¿cuál es el valor de la suma? $\boxed{1}$

p(2 cruces)= p(XX)= p(X) **y** p(X)=1/2*1/2=……

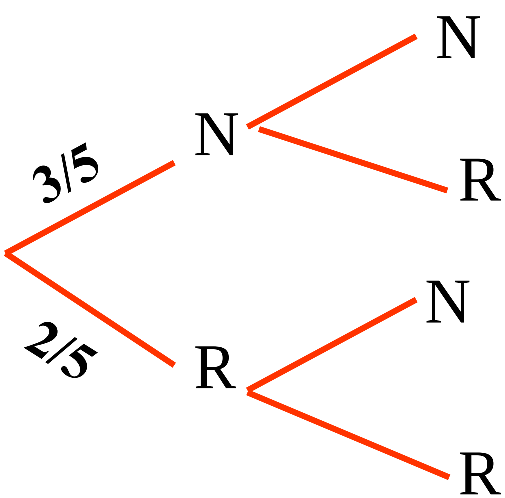
Los sucesos son independientes

ESQUEMA DE LA URNA

3N
2R

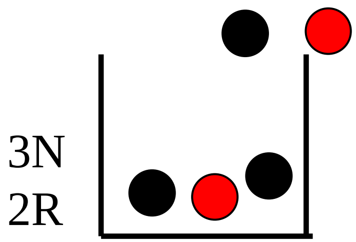


Se llama así porque se trata de extracción de elementos **sin reposición**.
Designaremos con “N” a la bolilla negra y con la letra “R” a la bolilla roja.
Se extraen dos bolillas en forma consecutiva



¿Qué sucede en la segunda extracción?

ESQUEMA DE LA URNA

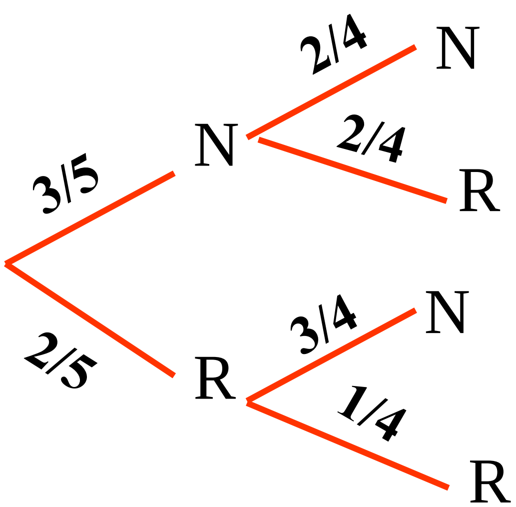


¿Qué sucede en la segunda extracción si las extracciones son SIN REPOSICIÓN?

¿Cuál es la posibilidad de que ambas bolillas sean negras?

p(N **y** N)=3/5 **x** 2/4=6/20

Sin reposición



¿Qué sucede si las extracciones son CON REPOSICIÓN?

p(N **y** N)=3/5 **x** 3/5=9/25

9/25>6/20

0,36>0,3

Cuando las extracciones son sin reposición la posibilidad de extraer una segunda bolilla negra cambia, se dice que son sucesos: DEPENDIENTES

SUCESOS-CLASE EXHAUSTIVA

<u>Suceso:</u> A_i. Un suceso A respecto a un espacio muestral S asociado al experimento E, es simplemente un conjunto de resultados posibles del mencionado experimento.

E: arrojar un dado correcto y observar su cara superior

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A=Suceso par

A = {2, 4, 6}

B=Suceso impar

B = {1, 3, 5}

Suceso $A \subset S$; Suceso $B \subset S$

Dos sucesos que no tienen puntos comunes son mutuamente excluyentes

La unión de los sucesos A y B completan el espacio muestral.

Clase exhaustiva.

Si se tienen los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, estos forman una clase exhaustiva de "S" si cumplen con las siguientes condiciones:

1) $A_j \cap A_i = \varnothing$ para cualquier $j \neq i$, esto es, si los k sucesos son mutuamente exclusivos.

2) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$, esto es, los k sucesos "completan" el espacio muestral "S".

TEORIAS DE PROBABILIDAD

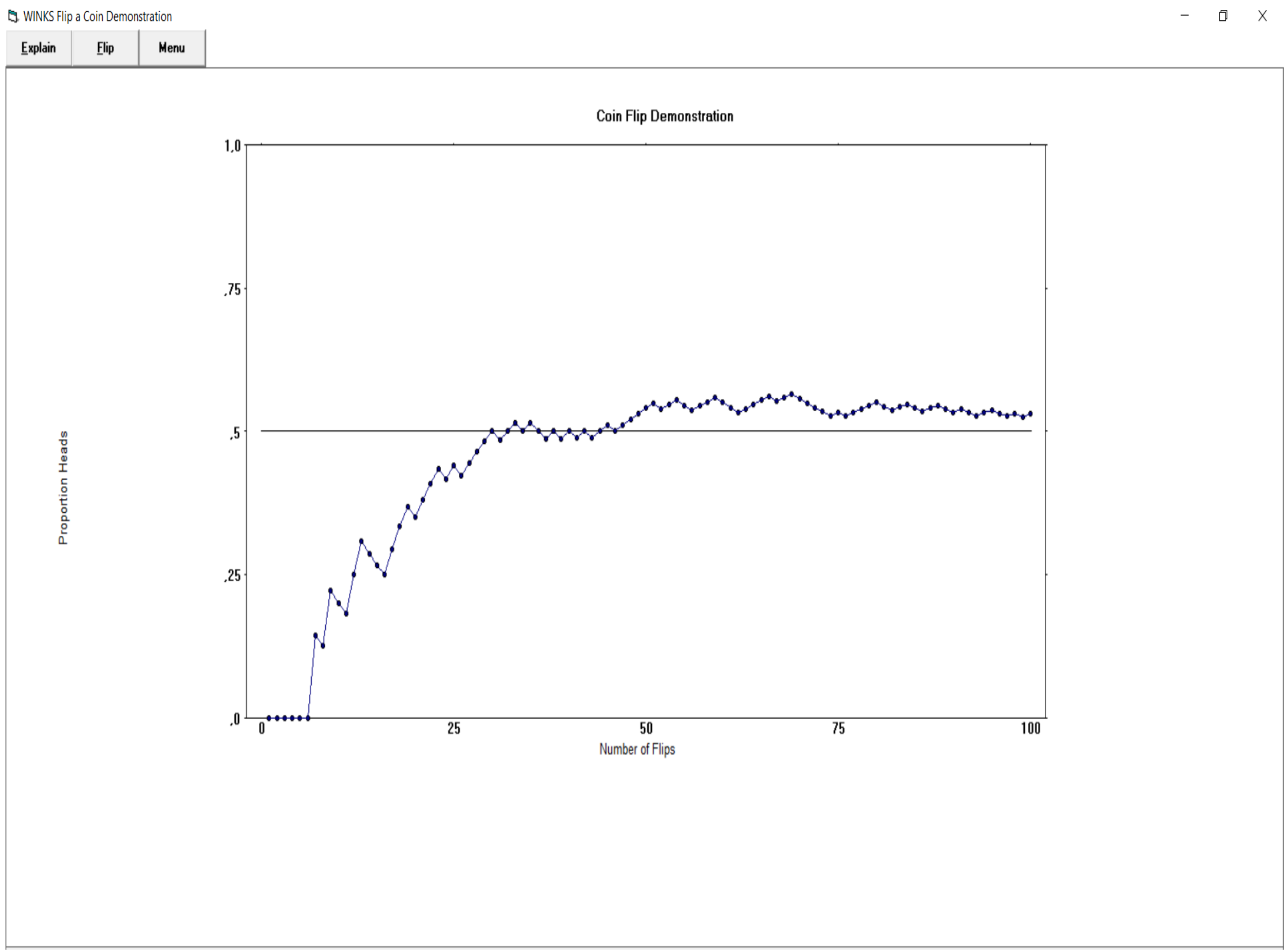
-Frecuencia relativa (A posteriori)
-Clásica (A priori)
-Axiomática

La **FRECUENCIA RELATIVA** $\tilde{f}(A)$ tiene las siguientes propiedades *(Meyer)*

1) $0 \leq \tilde{f}(A) \leq 1$
2) $\tilde{f}(A)$= 1 sí y sólo sí A ocurre cada vez(siempre) en las n repeticiones.
3) $\tilde{f}(A)$= 0 sí y sólo sí A nunca ocurre en las n repeticiones.
4) Si A y B son dos sucesos que se excluyen mutuamente (conjuntos disjuntos) entonces $\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B)$

5) $\tilde{f}(A)$ basado en n repeticiones converge en un valor fijo que podemos llamar p(A), cuando $n \to \infty$.

*NOTA: En Descriptiva llamamos “h” a la frecuencia relativa


WINKS Flip a Coin Demonstration
Explain
Flip
Menu
Coin Flip Demonstration
1,0
,75
,5
,25
,0
Proportion Heads
0
25
50
75
100
Number of Flips

TEORÍA CLÁSICA

La probabilidad de que un evento A ocurra se anota **P(A)** y se calcula mediante el cociente:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{Número de casos Totales}}$$

Esto es válido, cuando en el experimento aleatorio todos sus resultados son equiprobables y los valores de una probabilidad están entre 0 y 1.

TEORÍA AXIOMÁTICA

Sea E un experimento aleatorio y S el espacio muestral asociado con ese experimento aleatorio y sea P una función que asigna un número real a cada suceso $A \subset S$.

Llamamos **probabilidad del suceso A** y denotamos con P(A) al número real que satisface los siguientes axiomas:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son sucesos que se excluyen mutuamente de par en par, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

EVENTOS COMPUESTOS

Para formar un evento compuesto se combinan 2 o más eventos simples de tal forma que es necesario analizar con mucho cuidado si se emplean los términos “Y”, “O”, “NO”, “NI”, “DADO”, y otros, pero además analizar y leer detenidamente cuál es concretamente la pregunta a responder.

Los eventos compuestos son :

1. P($\overline{A}$)= P(Ac) (Probabilidad de evento complementario)

2. P(A $\cup$ B) (Probabilidad de que ocurra A **ó** B)

3. P(A $\cap$ B) (Probabilidad de que ocurran A **y** B)

4. P(A / B) (Probabilidad de que ocurra A si ya ha ocurrido B)

Ejemplo 1

Un experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado, el espacio muestral es el siguiente:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Algunos eventos posibles son:

A = {Sacar un 1}

B = {Sacar un 6}

C = {Sacar un número par} = {2, 4, 6}

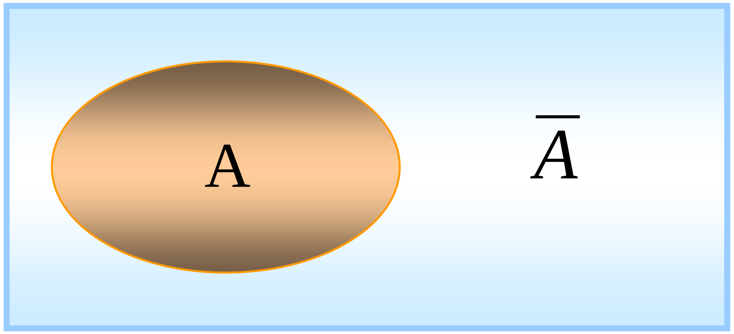
Notamos que los eventos A y B son simples, y el evento C es compuesto.

EVENTOS COMPUESTOS

1. P($\overline{A}$)= P(Ac) (Probabilidad de evento complementario)

Si el evento A no ocurre, decimos que su complemento $\overline{A}$ ha ocurrido y viceversa. Las probabilidades de A y $\overline{A}$ están relacionadas por la fórmula:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



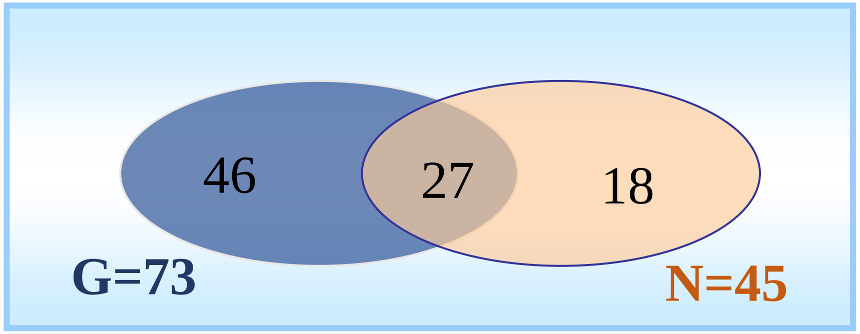
Si La probabilidad de que llueva es 2/5, ¿cuál es la probabilidad de que **NO** llueva?

EVENTOS COMPUESTOS

De un grupo de 100 socios del Club “La Varianza”,

- 73 están anotados en las clases de gimnasia
- 45 hacen natación.
- 27 toman clases de gimnasia y hacen natación.

Representemos la situación a través de **diagramas de VENN.**



¿Cuál es la probabilidad de que un socio haga gimnasia y natación?

$P(G \cap N)=27/100$

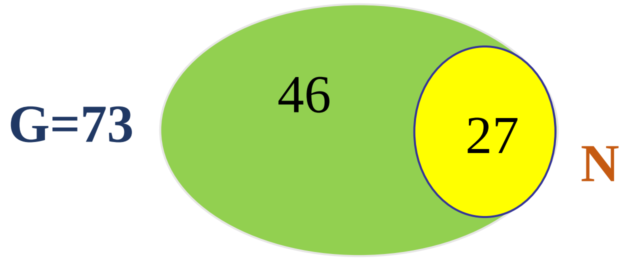
¿Cuál es la probabilidad de que un socio haga gimnasia o natación?

$P(G \cup N) = P(G) + P(N) - P(G \cap N)=73/100 + 45/100 - 27/100=91/100$

EVENTOS COMPUESTOS

¿Cómo se llaman los sucesos N y $\overline{N}$?

Si consideramos solo a los que hacen gimnasia, ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un socio que haga natación?



$$P\,(N/G) = \frac{P(N \cap G)}{P(G)} = \frac{27/100}{73/100} = 27/73$$

Generalizando $$P\,(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$$

Evento complementario: Es el conjunto de todos los puntos muestrales que no pertenecen al conjunto.

Dado A, es $\overline{A}$ ó A_c el "complemento de A".

Eventos mutuamente excluyentes: Son tales que la concurrencia de uno impide la ocurrencia del otro, en un mismo ensayo o experimento básico. A y B son mutuamente excluyentes sí y sólo sí
$A \cap B = \varnothing$

Probabilidad Condicional: Dados dos sucesos A y B, la probabilidad de que ocurra A habiendo ocurrido B (o de que A esté condicionado a la aparición previa de B), se escribe:
P(A/B)

Eventos probabilísticamente independientes : Son aquellos en que la ocurrencia de uno no modifica la probabilidad de ocurrencia del otro en más de un ensayo o experimento básico.

A y B son independientes si $P(A)= P(A/B)$ o $P(B)= P(B/A)$

Regla de la suma o de la adición :

Sean A y B dos eventos definidos en S

Es $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

y es $\mathbf{P(A \cup B)= P(A) + P (B)}$

si A y B son mutuamente excluyentes → $\mathbf{P(A \cap B)=\emptyset}$

Regla del Producto :

Sean A y B dos sucesos definidos en S

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) . P(B/A)}$$

o bien

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(B) . P(A/B)}$$

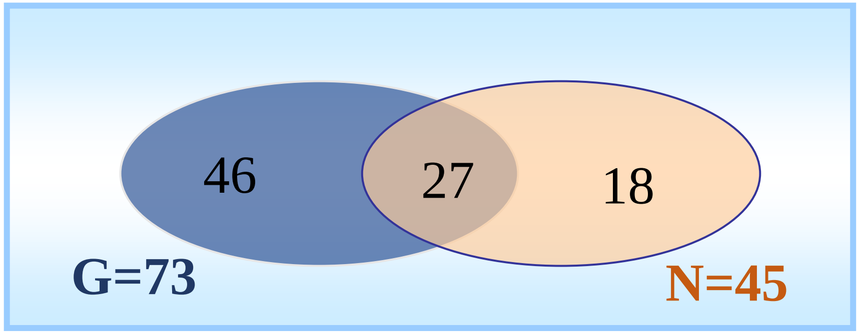
Si A y B son independientes $\mathbf{P(A \cap B)= P(A). P(B) = P(B). P(A)}$

EVENTOS COMPUESTOS

De un grupo de 100 socios del Club “La Varianza”,

- 73 están anotados en las clases de gimnasia
- 45 hacen natación.
- 27 toman clases de gimnasia y hacen natación.

-Representemos la situación a través de diagramas de VENN.



Los datos se pueden colocar en una **tabla doble entrada**

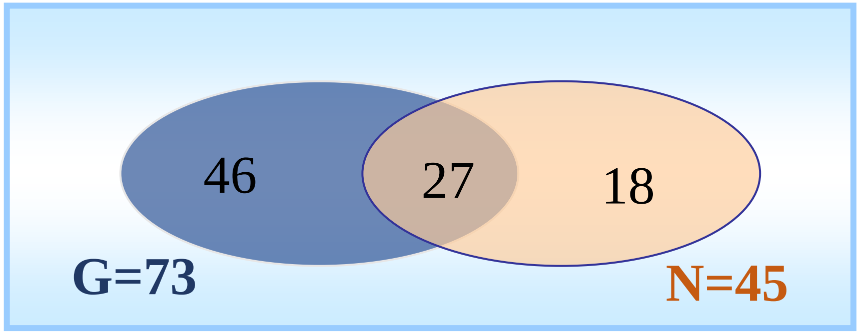
	N	$\overline{N}$	Total
G	27		73
$\overline{G}$			
Total	45		100

EVENTOS COMPUESTOS

De un grupo de 100 socios del Club “La Varianza”,

- 73 están anotados en las clases de gimnasia
- 45 hacen natación.
- 27 toman clases de gimnasia y hacen natación.

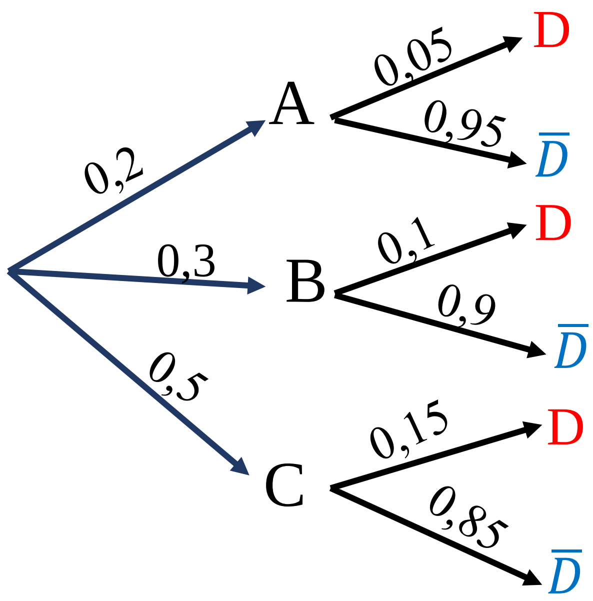
-Representemos la situación a través de diagramas de VENN.



Los datos se pueden colocar en una tabla doble entrada

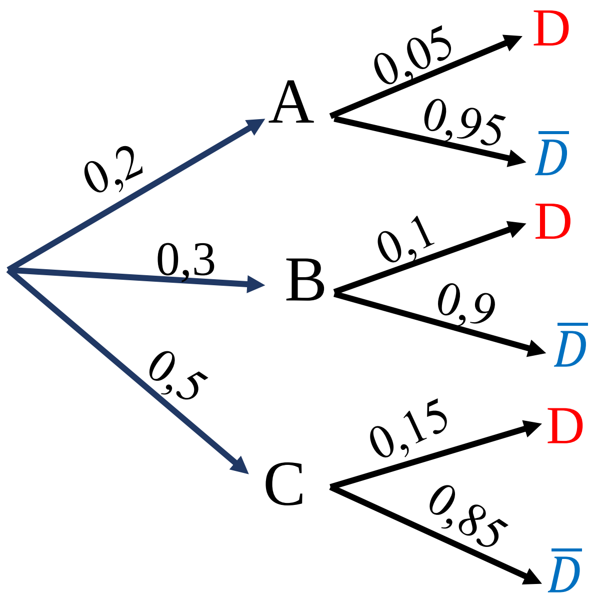
	N	$\overline{N}$	Total
G	27	46	73
$\overline{G}$	18	9	27
Total	45	55	100

EJERCICIO: En una fábrica hay 3 máquinas A, B y C que producen en 20%, el 30% y el 50% de la producción total, con porcentajes de defectuosos del 5%, 10% y 15% respectivamente. Se extrae de la producción un artículo:



1-¿Cuál es la probabilidad de que sea fabricado por la máquina A?

P(A)=0,2

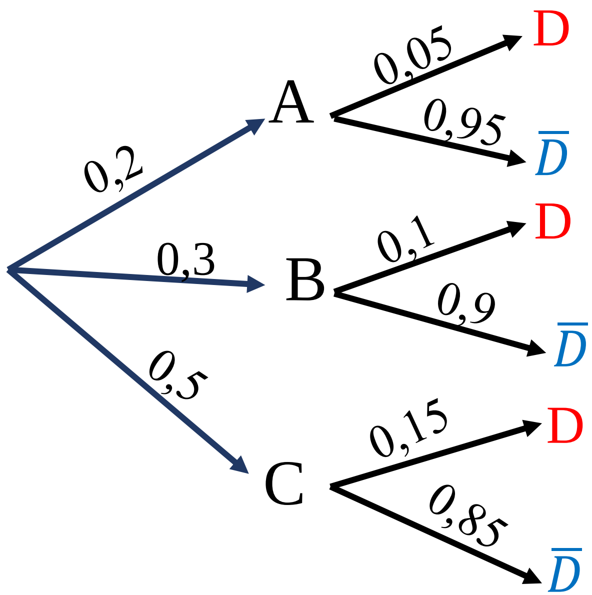


2-¿Cuál es la probabilidad de que un artículo resulte defectuoso al ser fabricado por la máquina A?

P(D/A)=0,05

3-¿Cuál es la probabilidad de que sea fabricado por la máquina A y defectuoso?

P(A∩D)=P(A) * P(D/A)=0,2 * 0,05= 0,01



4-¿Cuál es la probabilidad de que el artículo sea defectuoso?

$$P(D)=\overbrace{P(A)*P(D/A)}^{\text{D máquina A}} + \overbrace{P(B)*P(D/B)}^{\text{D máquina B}} + \overbrace{P(C)*P(D/C)}^{\text{D máquina C}}=$$

$$= 0,2 * 0,05 + 0,3 * 0,1 + 0,5 * 0,15 =0,115$$

5- Se extrajo un artículo del stock, y al revisarlo resultó defectuoso. Determinar la probabilidad de que la máquina causante del defecto sea la máquina A.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,01}{0,115} = 0,0869565$$

P(A∩D)=P(A) * P(D/A)=0,2 * 0,05= 0,01

Teorema de Probabilidad Total
Teorema de Bayes

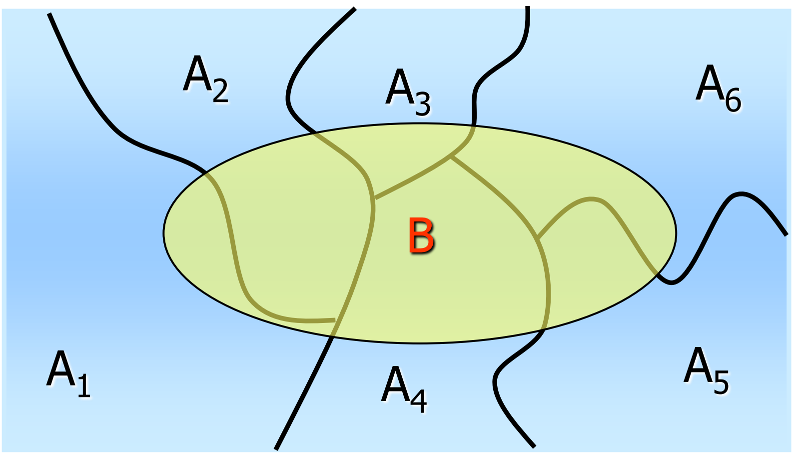
Se considera como **el proceso inverso de la probabilidad total**. Se trabaja con la probabilidad condicional, que se conoce como la ocurrencia de un suceso condicionada por la ocurrencia de otros acontecimientos.

Fue el reverendo Thomas Bayes quien postuló este teorema, el cuál fue considerado como válido después de su muerte.

Teorema de Probabilidad Total
Teorema de Bayes

A_1, A_2,..., A_6, forman una partición del espacio muestral.

$$A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$$

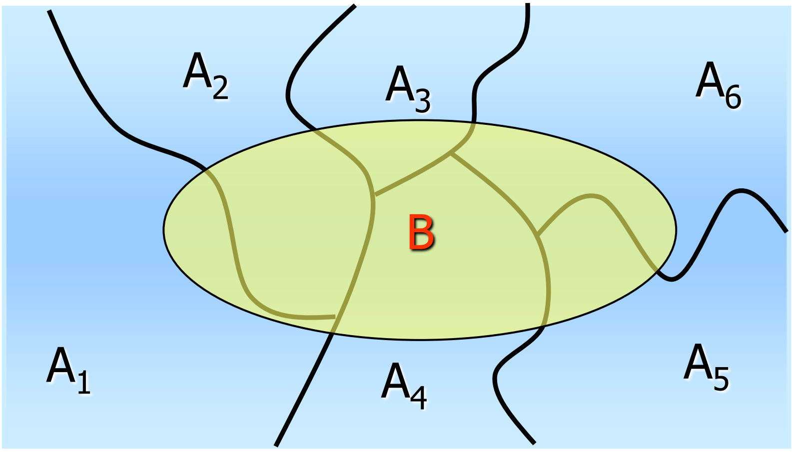


$$P(B) = \sum_i P(A_i) P(B/A_i)$$

Teorema de Probabilidad Total
Teorema de Bayes

- Por definición de probabilidad condicional se tiene:

$$P(A \cap B) =$$
$$P(B/A)P(A) =$$
$$P(A/B)P(B)$$



$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{\sum_i P(A_i)P(B/A_i)}$$

Teorema de Probabilidad Total
Teorema de Bayes

- Para el caso de una partición en dos conjuntos A y A^C:

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B/A^C)}$$

¡Muchas Gracias por su atención!